A GEOMETRIA DOS RASTROS DE BICICLETA

Alunos: Leonardo Lobo da Cunha da Fontoura e Frederico Banchik Israel
Orientador: Jairo da Silva Bochi

Introdução

Qual a relação entre os rastros dos pneus de uma bicicleta? Conhecido o rastro de trás (e o comprimento da bicicleta), é trivial determinar o rastro da frente. O problema inverso é mais interessante e recai em resolver uma equação diferencial ordinária (EDO). Essa equação é não-linear e geralmente não pode ser resolvida analiticamente. Por outro lado, a equação tem propriedades muito interessantes. Uma delas, descoberta por Foote [2], é que as aplicações de monodromia são transformações de Möbius.

Neste trabalho realizamos um estudo teórico dos rastros de bicicleta e de suas propriedades, e paralelamente desenvolvemos um programa em Java que realiza simulações, dando resultados gráficos e numéricos.

Relacionando os dois rastros

Duas observações servem de ponto de partida:

1. O corpo da bicicleta é sempre tangente à curva formada pelo rastro da roda de trás;
2. O comprimento da bicicleta é uma constante, digamos l.

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ curvas parametrizadas pelo tempo t no plano $\mathbf{R}^2$ que descrevem as posições da roda da frente e da roda de trás, respectivamente. Então as observações acima se expressam assim:

1. O vetor $f(t) - g(t)$ é paralelo a $g'(t)$.
2. O vetor $f(t) - g(t)$ tem comprimento constante l.

Conhecidos o comprimento l da bicicleta e o rastro da roda de trás $g(t)$, o rastro da roda da frente é simplesmente: $f(t) = g(t) + l.g'(t) / |g'(t)|$. O problema inverso, encontrar $g(t)$ a partir de $f(t)$, é mais complexo. Como não deve ser uma surpresa, a resposta será encontrada como solução de uma equação diferencial.

Para começar, observamos que se só estamos interessados nos rastros em si, a velocidade do ciclista é irrelevante. Assim, podemos reparametrizar as curvas para $f(s)$ e $g(s)$ de modo que a primeira seja parametrizada por comprimento de arco.

Sejam $\theta(s)$ e $\psi(s)$ os ângulos que fazem respectivamente os vetores $f'(s)$ e $g'(s)$ com o vetor horizontal constante (1,0). Nosso problema fica sendo encontrar $\psi(s)$ uma vez conhecido $\theta(s)$. Pode-se mostrar que vale a seguinte equação diferencial:

$$\psi'(s) = l^{-1} \text{ sen } [\theta(s) - \psi(s)]$$

É conveniente expressar esta equação de maneira mais intrínseca. Seja $\alpha(s) = \theta(s) - \psi(s)$ o ângulo formado pelo guidão com o corpo da bicicleta, e seja $k(s) = \theta'(s)$ a curvatura (com sinal) da curva da roda da frente. Então a EDO se torna:

$$\alpha'(s) = k(s) - l^{-1} \text{ sen } \alpha(s)$$

Em geral não é possível encontrar fórmulas explícitas para as soluções desta EDO, exceto em casos muito particulares, como quando a roda da frente percorre uma reta (caso considerado por Newton, onde a roda de trás percorre uma curva conhecida como *tractriz*) ou um círculo (caso considerado por Euler, ver [1]). No caso em que a bicicleta percorre uma trajetória aproximadamente reta, podemos aproximar o sen x na EDO por x, obtendo assim uma EDO linear. Neste caso, usando análise de Fourier é possível descrever como oscilações (pequenas) da roda da frente induzem oscilações da roda de trás.

Outras observações interessantes são: a velocidade escalar da roda de trás é dada por $|\cos \alpha(s)|$; a curvatura do rastro de trás é $l^{-1} \tan \alpha(s)$. Em particular, quando o guidão está a 90 graus, a roda de trás está instantaneamente parada e o seu rastro tem curvatura infinita – este pode ser um ponto tipo *cusp*.

Monodromia

Vamos agora abordar um problema diferente: Suponha dado um trecho do rastro da roda da frente, digamos $f(s)$ para s entre s_0 e s_1. Sabendo a posição inicial $g(s_0)$ da roda de trás, podemos calcular a sua posição final $g(s_1)$. Fazendo uma mudança de coordenadas simples, podemos considerar essas posições inicial e final como pontos no círculo unitário. A aplicação do círculo no círculo assim obtida é chamada *aplicação de monodromia*.

Foote [2] descobriu que essa aplicação de monodromia é uma *transformação de Möbius* (ou, mais precisamente, a restrição de uma transformação de Möbius ao círculo unitário).

Vamos explicar como esta transformação pode ser encontrada. Dado o trecho de rastro da roda da frente, determine as funções ângulo $\theta(s)$ e curvatura $k(s)$. A seguir, defina a função matricial:

$$A(s) = \begin{pmatrix} ik(s) & \dfrac{e^{i\theta(s)}}{2l} \\ \dfrac{e^{-i\theta(s)}}{2l} & -ik(s) \end{pmatrix}$$

Esta é uma família a um parâmetro de matrizes em su(1,1), a álgebra de Lie do grupo SU(1,1). Considere a equação diferencial matricial $M'(s) = A(s)\, M(s)$, com condição inicial $M(s_0)$ = Id. Então a solução $M(s)$ deste PVI é uma curva no grupo SU(1,1). Considere a tranformação de Möbius $F(z)$ associada à matriz $M(s_1)$:

$$M(s_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow F(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Como a matriz está em SU(1,1), a transformação $F(z)$ preserva o círculo unitário em $\mathbf{C}$. Pode-se provar que esta é exatamente a transformação de monodromia.

No caso em que a roda da frente percorre uma curva fechada, é natural classificar a transformação de monodromia em um dos tipos: *elíptico*, *parabólico* ou *hiperbólico*. Levi e Tabachnikov [3] demonstraram que se a curva da roda da frente é convexa e delimita uma área maior que πl^2 então a monodromia é hiperbólica. Isto demonstra (no caso convexo) uma conjectura feita por A. L. Menzin em 1906. Na verdade Menzin não estava interessado em bicicletas, mas em um instrumento mecânico chamado *planímetro de Pritz*, que obedece à mesma matemática que a bicicleta.

Referências

1- CADY, W.G. The circular tractrix. **American Mathematical Monthly**, v. 72, n. 10, p. 1065-1071, 1965.

2 - FOOTE, Robert L. Geometry of the Prytz planimeter. **Reports on Mathematical Physics.**, v. 42, n. 1/2, p. 249-271, 1998.

3 - LEVI, Mark; TABACHNIKOV, Serge. On bicycle tire tracks geometry, hatchet planimeter, Menzin's conjecture, and oscillation of unicycle tracks. **Experimental Mathematics**, v.18, n. 2, p. 173-186, 2009.